第七节 定积分的物理应用

一、变力沿直线作功

二、液体对薄板的侧压力

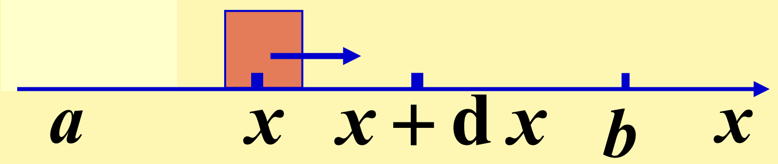
三、引力（自学）

一、变力沿直线作功

设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从 $x=a$ 移动到 $x=b$，力的方向与运动方向平行，求变力所做的功。

在 $[a,b]$ 上任取子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，在其上所作的功元素为

$$\mathrm{d}W = F(x)\mathrm{d}x$$



因此变力 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上所作的功为

$$W = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

例1. 弹簧在拉伸过程中，需要的力 F (单位：N)与弹簧的伸长量 s (单位:cm)成正比，即$F=ks$ (k是比例常数) 如果把弹簧由原长拉伸6cm，计算所做的功。

解： 当弹簧从x拉伸至$x+\mathrm{d}x$，可认为外力近似于$F=kx$

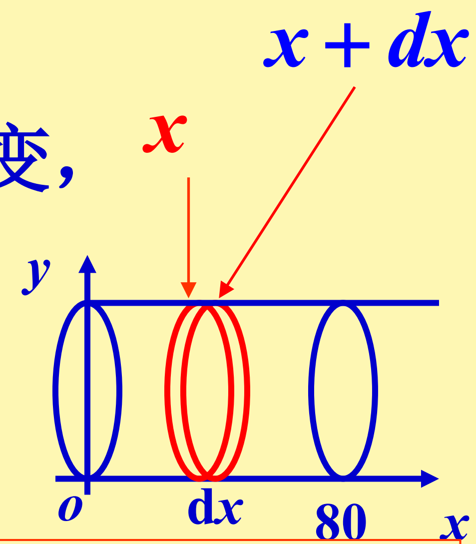
于是外力做功元素 $\mathrm{d}W=kx\mathrm{d}x$

而弹簧拉伸6cm， 从而

$$W=\int_0^6 kx\mathrm{d}x=18k(N\cdot cm)$$

$$=0.18k(N\cdot m)\quad=0.18k(J)$$

例2.直径为20cm、高为80cm的圆柱体内充满压强为10N/cm^2的蒸汽。设温度保持不变，要使蒸汽体积缩小一半，问需要做多少功？



解：建立坐标系如图所示，因为温度不变，

$$PV = 10\cdot\pi\cdot 10^2\cdot 80 = 80000\pi$$ 是定值。

当圆柱体的高减少$x$cm时的压强为

$$P(x)=\frac{k}{V(x)}=\frac{80000\pi}{\pi\cdot 10^2\cdot(80-x)}=\frac{800}{(80-x)}$$

$$\therefore \mathrm{d}W = P(x)S\mathrm{d}x=\frac{800}{(80-x)}\cdot\pi\cdot 10^2\mathrm{d}x$$

则$$W=\int_0^{40}\frac{800}{(80-x)}\cdot\pi\cdot 10^2\mathrm{d}x$$

$$=80000\pi\ln 2(N\cdot cm)=800\pi\ln 2(J)$$

理想气体状态方程

$$\frac{PV}{T}=nR$$

R为摩尔气体常数

克拉伯龙方程

例3. 用铁锤把钉子钉入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板的深度成正比，铁锤在第一次锤击时将铁钉击入1cm，若每次锤击所作的功相等，问第n次锤击时又将铁钉击入多少？

解：假如钉子钉入木板的深度为$x$cm

则木板对铁钉的阻力为 $F(x)=kx,$

第一次锤击时所作的功为 $W_1=\int_0^1 kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2},$

设n次击入的总深度为h厘米

n次锤击所作的总功为 $W_n=\int_0^h kx\mathrm{d}x=\frac{kh^2}{2},$

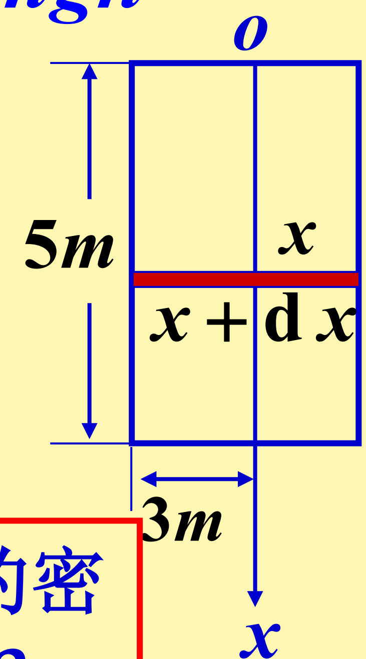
而每次锤击所作的功相等 $W_n=nW_1 \Rightarrow \frac{kh^2}{2}=n\cdot\frac{k}{2},$

所以n次击入的总深度为 $h=\sqrt{n},$

第n次击入的深度为$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$

例4. 一蓄满水的圆柱形水桶高为 5 m, 底圆半径为3m, 试问要把桶中的水全部吸出需作多少功 ?

克服重力势能做功 质点的情形: $W = mgh$



解: 建立坐标系如图。任取一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$, 这薄层水的体积元素

$$\mathrm{d}V = \pi 3^2 \,\mathrm{d}x$$

这薄层水吸出桶外所作的功(功元素)为

$$\mathrm{d}W = \rho g x \,\mathrm{d}V = 9\pi g \rho x \,\mathrm{d}x$$

设水的密度为 ρ

故所求功为

$$W = \int_0^5 9\pi g \rho x \,\mathrm{d}x = 112.5\pi g \rho \ (kJ)$$

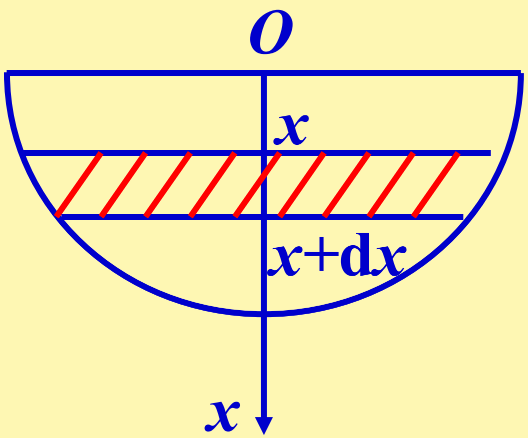
例5. 有一半径为 4 米开口向上的半球形容器, 容器内盛满了水,试问要将容器内的水全部吸出需作多少功 ?

解: 取坐标原点在球心, x轴垂直向下建立坐标系,

$$\mathrm{d}V = \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi(4^2 - x^2)\mathrm{d}x$$

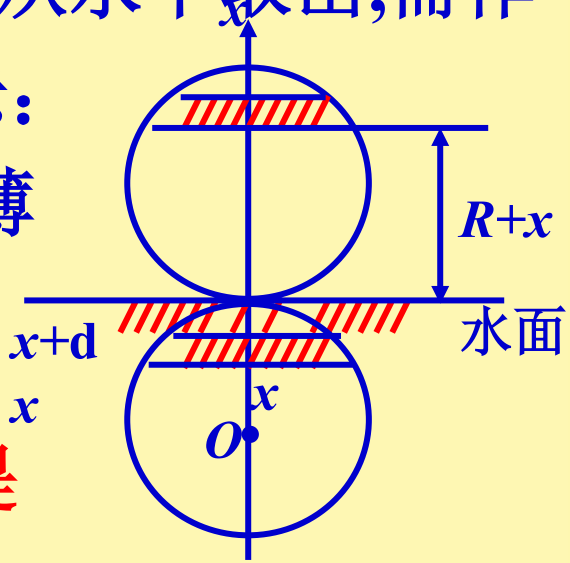
$$W = \int_0^4 \rho g \pi x (4^2 - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 64\pi\rho g\,(kJ)$$



例6. 半径为R的球沉入水中, 球的上部与水面相切, 球的密度与水的密度都为1，现将球从水中取出,需作多少功?

解：建立坐标系如图所示：



对应于区间[x，x+dx]的球体中的薄片(球台)的体积约为

$$\mathrm{d}V=\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x$$

球的比重与水相同，球的这一部分提升到水面不做功。当球体恰好露出水面时，这一薄片在水面以上移动的路程为 $R+x$，克服重力做功为

$$\mathrm{d}W=g\pi(R^2-x^2)(R+x)\mathrm{d}x$$

奇函数

于是 $W=\int_{-R}^{R}g\pi(R^2-x^2)(R+x)\mathrm{d}x$

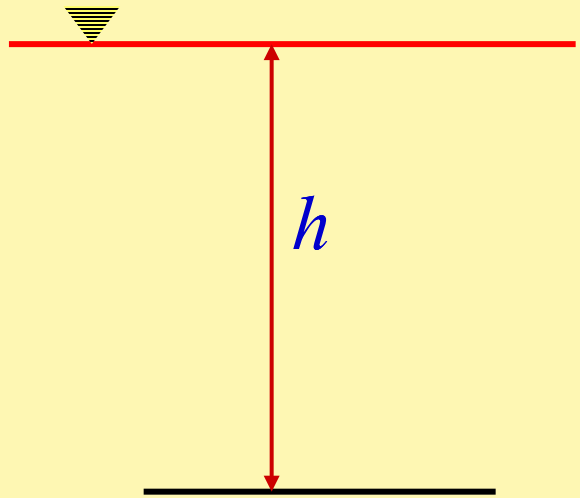
$$=g\pi\int_{-R}^{R}R(R^2-x^2)\mathrm{d}x=g\cdot\frac{4}{3}\pi R^4$$

二、液体对薄板的侧压力

压力=压强×受力面积 $=\rho g h\times$受力面积

设液体密度为 ρ

深为 h 处的压强： $\boldsymbol{P=g\rho h}$



面积为 S 的平板

- **当平板与水面平行时，**

平板一侧所受的压力为

$$F=PS$$

- **当平板不与水面平行时，**

所受侧压力问题就需用积分解决 .

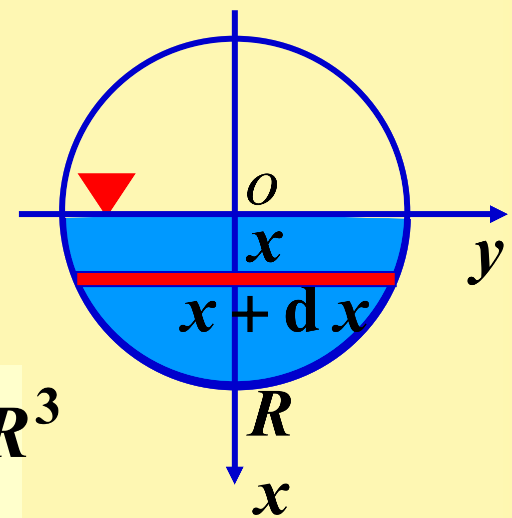
压力=压强×受力面积 $=\rho g h\times$受力面积

例7. 一水平横放的半径为R 的圆桶,内盛半桶密度为ρ的液体，求桶的一个端面所受的侧压力。

解: 建立坐标系如图. 所以半圆的方程为 $x=\sqrt{R^2-y^2}$

受力面积元素：$\mathrm{d}S=2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$

侧压力元素：$\mathrm{d}F=2\,g\rho x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$



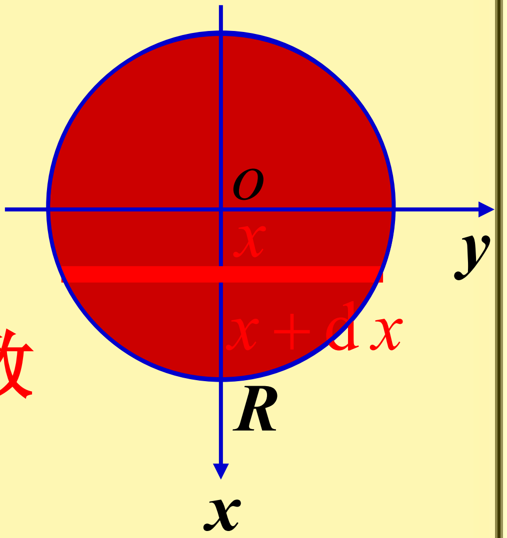
端面所受侧压力为

$$F=\int_0^R 2g\rho\,\underline{x}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2g\rho}{3}R^3$$

说明: 当桶内充满液体时,小窄条上的压强为 $g\rho(R+x)$,

侧压力元素 $\mathrm{d}F = 2\,g\rho(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$,

故端面所受侧压力为



$$F=\int_{-R}^{R}2g\,\rho(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

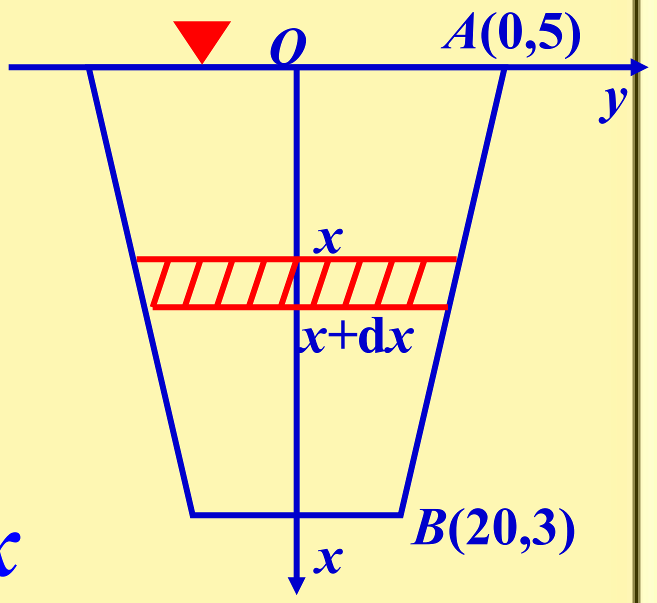
奇函数

$$=4Rg\rho\underbrace{\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x}_{\frac{1}{4}R^2\pi}$$

$$=\pi g\rho R^3$$

例8. 有等腰梯形水闸, 上底长10m, 下底6m, 高20m。试求当水面与上底相齐时, 闸门一侧所受的水压力。

解: 建立坐标系如图所示。



直线AB的方程为 $y = -\dfrac{x}{10} + 5$

闸门上对应于区间$[x, x+\mathrm{d}x]$

窄条形所受的压力约为

$$\mathrm{d}F = \rho g x \cdot 2\left(-\frac{x}{10} + 5\right)\mathrm{d}x$$

$$F = 2 \cdot \rho g \int_0^{20} x\left(-\frac{x}{10} + 5\right)\mathrm{d}x = 14373.33(kN)$$

(取$\rho = 1$)